Rithmomachie – souboj čísel čili aritmetická hra filosofů

RITHMOMACHIA – THE BATTLE OF
NUMBERS, I.E. THE ARITHMETICAL
GAME OF PHILOSOPHERS

MAREK OTISK

Filozofická fakulta

Ostravská univerzita v Ostravě

Reální 5

701 03 Ostrava

Filosofický ústav AV ČR

Jilská 1

110 00 Praha 1

marek.otisk@osu.cz

ABSTRAKT

This paper deals with the philosopher's game called *rithmomachia*, i.e. the battle of the numbers. The beginnings of the playing of this game we can find around the year 1000 AD, the oldest texts are dated to the first half of the 11th century. The aim of this paper is the description of selected rules of this game according to the oldest texts about rithmomachy (written between ca. 1030 and ca. 1130). This article mainly wants to focus on the correlation between those rules and the subject of interest of the medieval intellectuals in the field of arithmetic (especially in the context of Boethius's *Introduction to Arithmetic*).

1.

Mezi nejpůvodnější strategické deskové hry patřila ve středověku a v renesanci pedagogicko-intelektuální kratochvíle obvykle nazývaná rithmomachie neboli *conflictus numerorum*, tj. *ludus philosophorum*. Jednalo se o hru, jejíž hráči si zároveň aktivně osvojovali některá obtížná témata tehdejší aritmetické látky, tedy hrát rithmomachii mimo jiné znamenalo vzdělávat se v aritmetice, jak ji latinskému křesťanskému světu zprostředkoval Boethius ve svém *Úvodu do aritmetiky*, volném překladu stejnojmenného díla novopythagorejce Níkomacha z Gerasy.

Rithmomachie se začala v Evropě hrát pravděpodobně na sklonku 10. či na počátku 11. století, tedy v takřka

shodné době jako šachy,¹ s nimiž má mnoho společného (kupř. proti sobě zápolí dva hráči, souboj se odehrává na pravoúhlé, do čtvercových polí rozdělené hrací desce, protihráči lze odebírat jeho hrací figury atd.), ale také se od nich v některých ohledech výrazně liší. Zatímco šachy lze označit za aristokratickou zábavu, neboť samotná hra je strategicko-vojenské povahy a symbolizuje střet dvou armád, kde primárním cílem je zničit soupeřova krále, k čemuž jsou k dispozici střelci, jezdci či pěšci, tak rithmomachii již středověcí autoři popisovali jako hru vzdělavců a učenců, neboť její povaha je strategicko-pedagogická a soupeří zde dvě sestavy čísel,

1 Srov. Moyer 2001, s. 23–24.

příčemž hlavním cílem je uspořádat žetony s danými číselnými hodnotami do matematických posloupností.²

Tato studie přináší podrobnější představení uvedené hry, a to především na základě nejstarších dochovaných pravidel této hry, tj. textů o rithmomachii, které se nám dochovaly z období přibližně jednoho století mezi roky cca 1030–1130. Nejprve budou stručně nastíněny dějiny této hry (II), následně bude vysvětlen její název, což vytvoří základ pro teoretické rozvedení hlavních intelektuálních cílů, které byly touto hrou sledovány (III). Poté se již pozornost obrátí k vlastní hře – popsána bude hrací deska a výchozí rozestavení hráčích žetonů, včetně vysvětlení aritmetických vlastností čísel i matematických pravidel, podle nichž lze odvodit číselné hodnoty užívané v celé hře (IV), stručně bude zmíněn vlastní průběh hry a na závěr budou představeny hlavní typy vítězství, jež pravidla této hry umožňují (V). Hlavním cílem tohoto textu je tedy podat historicko-systematické uvedení do světa intelektuální zábavy středověkého (a renesančního) vzdělance či filosofa.

II.

Za „zlatý věk“ rithmomachie lze označit renesanci, resp. 15. a 16. století. Z této doby pochází početně největší množství textů, které popisují pravidla hry s čísly.³ Renesanční zájem o rithmomachii názorně dokládá např. slavná *Utopie* Thomase Mora, kde se ve druhé

knize mj. popisuje, jakým způsobem mohli obyvatelé bájněho ostrova trávit volný poobědový čas – debatovali nebo se oddávali hudbě, ale mohli se také vrhnout do víru zábavného rozptýlení: „Kostek a podobných nezapných i zhoubných her vůbec neznají. Jinak se u nich vyskytují dva druhy her, poněkud podobné hře v šachy. V jedné jde o bitvu čísel, v níž vyhrává číslo nad číslem. V druhé bojovným utkáním spolu zápolí ctnosti a nepravosti.“⁴ Je zřejmé, že první z uvedených her je právě rithmomachie.

Více než půl tisíciletí trávající poměrně intenzivní záliba v této hře se relativně rychle vytrácí s nástupem novověku. Tato ztráta zájmu bezprostředně souvisí s proměněnou rolí, kterou v rámci tehdejšího vědění začala aritmetika nově hrát. Rithmomachie je totiž bytostně spjata s boethiovsko-nikomachovskou aritmetikou, tedy především s novopýthagorejskou teorií čísel a jejich vlastností. Když se primární pozornost matematiků zaměřila na jiné aspekty aritmetické látky, přestala být rithmomachie jakožto hra, která uváděla do tajemství teoretické aritmetiky, tolik zajímavá.

Dnes panuje všeobecná shoda, že v prvotní podobě se hra začala hrát zřejmě na konci 10. století, nejpozději

2 Viz např. Fortolfus, *Rith.* II, prol., ed. Borst 1986, s. 450–451.

3 Podrobněji viz Folkerts 2003, s. XI–15–21.

4 More 1978, s. 65. Morus, Thomas, *Utopia* II, 4: „Aleam atque id genus ineptos ac perniciosos ludos ne cognoscunt quidem, ceterum duos habent in usu ludos, latrunculorum ludo non dissimiles. Alterum numerorum pugnam, in qua numerus numerum praedatur. Alterum in quo collata acie cum virtutibus vitia confligunt.“ Dostupné z: http://www.intratext.com/IXT/LAT0560/_PA.HTM [cit. 2015-11-02].

pak na počátku 11. století.⁵ Důvodem jejího rozšíření a popularity byl zvýšený zájem o umění *quadrivia*, který je doložen v klášterních a katedrálních školách kolem roku 1000. V samotném středověku byli za tvůrce pravidel hry označováni např. Pýthagorás, Boethius, nebo také Gerbert z Remeše (v letech 999–1003 papež Silvestr II.).⁶ Zvláště poslední uvedená možnost by mohla být plausibilní, a to hned z několika důvodů:

1. Zdá se být zřejmé, že rithmomachie byla od prvopočátku kladena do velmi úzké vazby k počtářství, které bylo prováděno na matematické pomůcce zvané abakus. Toto dokládají jak rukopisné kodexy, kde se velmi často o rithmomachii píše v konvolutech, které jsou věnovány obecně matematickým vědám *quadrivia* a jejich praktickým aplikacím (komputistika, abacistické počtářství, výpočty správných výměrů varhanních trubic apod.),⁷ tak vlastní středověká pojednání o svobodných uměních – např. *Anticlaudianus* Alana z Lille představuje dámu aritmetiku, která v jedné ruce drží abakus (*mensa pythagorae*) a druhou rukou se připravuje na bitvu čísel (*pugna numerorum*),⁸ což Alanův žák Radulf z Longchampu ve svém vlivném komentáři k Alanovu spisu vyložil jako totožnost abaku (*mensa pythagorae*) a rithmomachie (*rithmantia*).⁹ Za hlavního iniciátora uvedení nové podoby abacistického

počtářství na křesťanském Západě lze důvodně označit právě Gerberta.¹⁰

2. Jak uvádějí *de facto* všechny texty o rithmomachii, je tato hra postavena na vybraných tématech boethiovské aritmetiky. O oživení zájmu o Boethiův učební aritmetický text se opětovně zasloužil mj. právě Gerbert, který je také autorem komentáře k pasáži z Boethiova *Úvodu do aritmetiky* (dle podoby výsledku, k němuž remešský učitel došel, je tento text často nazývaný *Saltus Gerberti*), kde se řeší problematika, jež je nezbytná pro hraní rithmomachie.¹¹ S tímto Gerbertovým pojednáním pracovali i autoři nejstarších dochovaných pravidel o souboji čísel.¹² Propojení této aritmetické tradice a popularity rithmomachie sugestivně dokládá blíže neznámý skriptor, který kolem roku 1100 souhlasí s opisem „aritmetiky“, ale především urguje tolik žádanou rithmomachii (*desideratam rithmimachia*).¹³

3. Pro vlastní matematickou hru je vhodné (ačkoli nikoli nezbytné) užívat arabské číslice (zvláště v nejstarších textech jsou však užívány římské a řecké číslice). I v tomto ohledu platí, že předním šířitelem užívání arabských číslic v křesťanském západním latinském kulturním okruhu byl Gerbert.¹⁴

5 Srov. např. Borst 1986, s. 39–49; Moyer 2001, s. 19–22.

6 Folkerts 2003, s. X–5.

7 Blíže viz např. Evans 1976, s. 260.

8 Alanus ab Insulis, *Anticl.* III, 288–293.

9 Radulphus de Longo Campo, *In Anticl.* 176.

10 Viz zejména Gerbertus Remensis, *Regulae*, ed. Bubnov 1899, s. 1–22.

11 Gerbertus Remensis, *In Inst. Arith.*, ed. Bubnov 1899, s. 31–35.

12 Srov. např. Borst 1986, s. 58–60.

13 Viz Evans 1976, s. 260.

14 Viz např. záhlaví nákresu abaku v rukopise Bern, Burgerbibliothek, MS 250, f. 1r („Gerbertus Latio numeros abacique figuras.“), citováno např. v Folkerts 1996, s. 28.

4. Jelikož pravidla hry rithmoma-
chie jsou založena na práci s číselnými
poměry, jejich vzniky, převody a kladení
číselných hodnot do posloupností, což je
tematika, která má bytostnou vazbu na
matematicky založenou hudební teorii,
lze i z tohoto důvodu spekulovat o přímé
vazbě na Gerberta z Remeše, který se
intenzivně věnoval také hudební teorii.¹⁵

Je tedy pravděpodobné, že v prvotní
podobě se hra mohla objevit již v okruhu
Gerberta z Remeše,¹⁶ případně jiných
intelektuálů působících kolem (či
spíše po) přelomu prvního milénia,
nejpozději však v první třetině 11. sto-
letí (dost možná i jako produkt rivality
mezi centry vzdělanosti ve Wormsu
a Würzburgu).¹⁷

Nejstarší dochované texty o rithmo-
machii jsou totiž datovány do první po-
loviny 11. století. Obtížně identifikova-
telný Asilo z Würzburgu sepsal kolem
roku 1030 stručný text *Regula de rithma-
chia*¹⁸ a na jeho výtvar navázal o jedno
desetiletí později (patrně) Heřman
z Reichenau s dílkem (později nazva-
ným) *Ludus qui dicitur rithmimachia*.¹⁹

Z poslední třetiny 11. století a z prv-
ních let po roce 1100 se nám dochovalo
hned pět dalších spisků, které předsta-
vují pravidla této hry: kolem roku 1070
vznikl krátký text, jehož autor je nazý-
ván anonym z Lutychu, přibližně o dvě
desetiletí později sepsal Odo z Tournai
pojednání *De rithmomachia* a ve stejné
době vzniklo i dílo *Descriptio ritmachyae*
od tzv. anonyma z Řezna; k nim je nutno
připočíst dva kompilační texty – *Regulae
rithmomachiae* (vznikl patrně v Trevíru)
a tzv. Bavorská kompilace.²⁰

První skutečně ucelené a soustavné
seznámení s celou hrou pochází z první
třetiny 12. století a jeho autorem je jistý
Fortolfus, který ve dvou knihách o cel-
kem třiceti kapitolách spisu *Rithmima-
chia* přehledně představuje všechny
důležité herní prvky – od matematicko-
aritmického základu samotné hry až
po různé typy vítězství.²¹

Oblibu hry dokládají i další stře-
dověké (a zejména renesanční) texty
z 12.–16. století,²² jejichž počet od 17. sto-
letí znatelně klesá. Na sklonku 19. sto-
letí se rithmomachie stala předmětem

15 Viz Gerbertus Remensis, *1In Inst. Mus.*,
ed. N. Bubnov, s. 28–30, nebo týž, *2In
Inst. Mus.*, s. 30–31, příp. týž, *Rogatus*,
ed. K.-J. Sachs, s. 59–81. Srov. také např.
Sachs 1972 nebo Huglo 2000.

16 Silva 2010, s. 146–147.

17 Srov. Moyer 2001, s. 18–20; Meben 1999,
s. 60 nebo Borst 1986, s. 55–56.

18 Asilo Wirzburgensis, *Reg. de rith.*, ed.
Borst 1986, s. 330–334. Podrobnější infor-
mace o autorovi i díle nabízí především
Borst 1986, s. 50–80.

19 Hermannus Contractus [?], *Rith.*, ed. Bor-
st 1986, s. 335–339. Představení spisu
i důvody pro jeho připsání Heřmanovi
z Reichenau rozebírá detailně Borst 1986,
s. 81–97.

20 Edice textů zpracoval Arno Borst – viz
Borst 1986: Anonymus Leodiensis,
De arith., s. 340–343; Odo Tornacensis,
De rith., s. 344–383; Anonymus Ratisbo-
nensis, *Desc. ritm.*, s. 384–404; Anonymus
de Franconia, *Reg. rith.*, s. 405–414 a Ano-
nymus de Bavaria, *Reg. rhyth.*, s. 415–426.
U posledního titulu viz také PL 133,
c. 795–802 (pod názvem *Regulae Domni
Odonis de rhythmimachia*). Obsáhlou
studii ke všem uvedeným písemně do-
chovaným pravidlům nabízí Borst 1986,
s. 98–185; srov. rovněž stručný přehled ve
Folkerts 2003, s. X–7–10.

21 Fortolfus, *Rith.*, ed. Borst 1986, s. 427–470.
Informace o díle i autorovi poskytuje
Borst 1986, s. 186–211.

22 Přehledně viz Folkerts 2003, s. 11–21.

zájmu historiků středověkého vědění či kultury a postupně znovu získala svou hráčskou základnu, jak to nyní dokládá např. skutečnost, že si dnes lze pořídit i elektronickou aplikaci této hry.

III.

Vlastní název hry vysvětluje podrobně kupř. Fortolf, když nejprve s odkazem na Prisciana upozorňuje, že nebudeme-li znát jména, pak nikdy nepoznáme samotné věci.²³ Pojmenování rithmomachie je odvozeno ze dvou řeckých slov: *rithmos* odpovídá latinskému *numerus*, tedy číslu; *machia* pak latinskému *pugna*, tzn. souboj, bitva či válka; název *rithmomachia* lze tedy přeložit jako *pugna numerorum*, tedy (sou-)boj čísel.²⁴

Ve hře proti sobě stojí dvě sestavy čísel a cílem hry je uspořádat žetony s číselnými hodnotami do harmonických matematických posloupností. Tímto cílem je rekonstruován Boží stvořitelství akt, neboť přirozenost čísel stojí v metafyzickém základu reality, protože jsou to právě čísla, která Bůh užíval při tvorbě světa. Tento pohled na důležitost čísel a matematiky dokládá biblický text (jak upozorňuje Fortolf), v knize *Moudrosti* se totiž píše, že Bůh vše uspořádal podle míry, čísla a váhy.²⁵

Jelikož je celá hra zároveň pedagogickou pomůckou, která má zábavnou formou seznámit hráče s některými detaily aritmetického umění, není překvapivé, že Fortolf dále cituje Boethiův *Úvod do aritmetiky*, v němž je vyzdvížena metafyzická role čísel, číselných poměrů a jejich vzájemných převodů. Číslům a jejich poměrům je možné rozumět jako vzorům, resp. formám, které se nacházejí v mysli Boží a podle nichž Bůh vytvořil vše stvořené.²⁶ A jelikož jsou podle Boethia matematické obory těmi, jejichž znalost je nezbytným předpokladem pro studium filosofie,²⁷ je i samotná rithmomachie hrou, která je určena filosofům (označení *ludus philosophorum* pochází ze 14. století²⁸) – střet či souboj (*conflictus*) čísel totiž vede k pochopení základních principů aritmetického uspořádání skutečnosti a následně umožňuje získat filosofickou moudrost.²⁹

Podobný aspekt důležitosti samotné hry zdůrazňuje nejpodrobněji Fortolf, který u rithmomachie zmiňuje její užitečnost, neboť zábavnou formou poskytuje hráčům intelektuální prospěch, a není tedy mrháním času, jak by se mohlo zdát.³⁰ Když se pak zamýšlí nad předmětem a cíli hry (*materia, intentio, utilitas*), opakuje důležitost seznámení se s číselnými poměry a různými typy

23 Fortolfus, *Rith.* I, 1, s. 430: „... ut ait Priscianus, nisi nomen scieris, cognitio rerum perit.“

24 Fortolfus, *Rith.* I, 1, s. 430: „Ex duabus grecis dictionibus composito nomine artem istam rithmimachiae titulo inscribi placuit. Rithmos enim grece, latine numerus; machia pugna dicitur. Inde rithmimachia, id est numerorum pugna.“

25 Fortolfus, *Rith.* I, prol., s. 428. Srv. *Sap.* 11, 20: „Sed omnia in mensura et numero et

pondere disposuisti.“ (*Mdr.* 11, 20: „Ale ty jsi všechno uspořádal s mírou, počtem a váhou.“).

26 Fortolfus, *Rith.* I, prol., s. 428–429. Srv. Boethius, *Inst. Arith.* I, 1–2.

27 Boethius, *Inst. Arith.* I, 1.

28 Borst 1986, s. 232.

29 Srv. Odo Tornacensis, *De rith.*, app. K, s. 378.

30 Fortolfus, *Rith.* I, prol., s. 427.

čísel, jak je Boethius popsal v *Úvodu do aritmetiky*,³¹ k čemuž dodává, že znalost této hry je rovněž základem pro pochopení a zvládnutí přírodní filosofie, resp. fyziky, tedy vědění o stvořeném světě, jak je reprezentováno uměními *quadrivia*.³²

To je také hlavním důvodem, proč většina zmíněných textů, které uvádějí do pravidel rithmomachie, začíná uvedením do aritmetické látky.³³ Boethiův (a samozřejmě rovněž Níkomachův) *Úvod do aritmetiky* představuje učebnicový přehled tehdy probírané aritmetické problematiky a největší pozornost je zde kladena na nejrůznější klasifikační třídění vlastností čísel. Některé vlastnosti náleží číslům *per se*, tedy hovoříme-li o číslu jako takovém. Zde jsou pak různé charakteristiky vyvozeny z toho, že je číslo sudé (*par*) nebo liché (*impar*), včetně subtypů obou kategorií, nebo je číslo podměrné, nadměrné či dokonalé atp.³⁴ Mnohé z těchto matematických vlastností čísel jsou využívány i v rithmomachii (např. sudost a lichost), a byť v některých případech se ve hře uplatňují jen okrajově, nechybí v pravidlech z 11. a z první třetiny 12. století (někdy i poměrně velmi rozsáhlé) pasáže o této problematice.³⁵

31 Fortolfus, *Rith.* I, 2–4, s. 430–431.

32 Fortolfus, *Rith.* I, 5, s. 431–432.

33 Asilo Wirzburgensis, *Reg. de rith.* 1, s. 330; Hermannus Contractus [?], *Rith.* 1–2, s. 335, Odo Tornacensis, *De rith.* 1–2, s. 344–345 atd.

34 Boethius, *Inst. Arith.* I, 3–20, s. 15–54; srov. také Nikomachos, *Inst. Arith.* I, 7–16, s. 13–44.

35 Viz např. Odo Tornacensis, *De rith.*, app. C 6–11, s. 366–368 nebo Anonymus de Franconia, *Reg. rith.* 27–28, s. 412–413.

Pro hru s čísly jsou však ještě důležitější vlastnosti čísel *per aliud*, tedy jsou-li čísla vztažena k jiným číslům, jinými slovy když vytvářejí číselné poměry. V tomto případě Boethius odlišuje totožnost či rovnost (*aequalitas*, tj. čísla mají stejnou hodnotu, např. 5 a 5, resp. tucet a tucet atp.) a nerovnost, nestejnost (*inaequalitas*, tj. číselné hodnoty se liší, např. 5 a 4, resp. tucet a kopa atp.). Pokud jde o nestejnost, lze takto vymezená čísla rozlišit do dvou základních skupin: nejprve existují případy, kdy se větší číslo srovnává s menším (např. 3 a 2), a dále pak nastávají situace, kdy se menší číslo srovnává s větším. V prvním typu se jedná o čísla, která jsou strukturována podle násobných poměrů, ve druhém případě jsou odvozena od dělitelů. Ve vlastní rithmomachii se pracuje s klasifikací čísel vycházející z násobných vztahů, podle níž je vyčleněno pět základních skupin těchto číselných vztahů: násobek (*multiplex*), superpartikulární poměr (*superparticularis*), superparcipientní poměr (*superpartiens*), superpartikulární násobek (*multiplex superparticularis*) a superparcipientní násobek (*multiplex superpartiens*).³⁶

Představení jednotlivých typů čísel podle této klasifikace se stalo součástí textů o rithmomachii³⁷ a je v podobném duchu rozvedeno v tab. 1.

Jelikož z prvních tří násobných poměrů jsou odvozeny zbylé dva druhy nestejných typů čísel, tvoří

36 Boethius, *Inst. Arith.* I, 21–22, s. 54–56; srov. také Nikomachos, *Inst. Arith.* I, 17, s. 44–46.

37 Viz např. Odo Tornacensis, *De rith.*, app. K 4–6, s. 379.

Tab. 1 – Druhy čísel podle relativních vlastností, větší číslo se srovnává s menším

typ čísel	charakteristika	poměr (řada čísel)
násobky $b = a \cdot n$; kde $n > 1$	větší číslo obsahuje v sobě menší číslo více než jednou	2 : 1 (2, 4, 8...) 3 : 1 (3, 9, 27...) 4 : 1 (4, 16, 64...)
superpartikulární čísla , tj. čísla s částí $b = (a + 1) / a$	větší číslo zahrnuje celé menší číslo, a ještě nějakou jeho část, kterou lze vyjádřit jako kmenný zlomek, tj. čitatelem je jednička	3 : 2 (4, 6, 9...) 4 : 3 (9, 12, 16...) 5 : 4 (16, 20, 25...)
superparcientní čísla , tj. čísla s částmi $b = (a + x) / a$; kde $x > 1$ a zároveň $x < a$	větší číslo zahrnuje celé menší číslo a dále více než jednu jeho část, tzn. tuto část menšího čísla nelze vyjádřit jako zlomek, jehož čitatelem by byla jednička	5 : 3 (9, 15, 25...) 7 : 4 (16, 28, 49...) 9 : 5 (25, 45, 81...)
násobná superpartikulární čísla , tj. násobné vztahy čísel s částí $b = (a \cdot n) + [(a + 1) / a]$; kde $n > 1$	větší číslo obsahuje v sobě celé menší číslo více než jednou, a ještě nějakou jeho část, kterou lze vyjádřit jako kmenný zlomek	5 : 2 (4, 10, 25...) 7 : 2 (4, 14, 49...) 7 : 3 (9, 21, 49...)
násobná superparcientní čísla , tj. násobné vztahy čísel s částmi $b = (a \cdot n) + [(a + x) / a]$; kde $n > 1$ a zároveň $x > 1$, resp. $x < a$	větší číslo obsahuje v sobě celé menší číslo více než jednou, a ještě více než jednu jeho část, tzn. tuto část menšího čísla nelze vyjádřit jako zlomek, jehož čitatelem by byla jednička	8 : 3 (9, 24, 64...) 11 : 4 (16, 44, 121...) 11 : 3 (9, 33, 121...)

násobná, superpartikulární a superparcientní čísla hlavní základnu celé hry rithmomachie.³⁸

38 Viz např. Anonymus Leodiensis, *De arith.* 1, s. 340: „Inaequalitas species quinque sunt, multiplex, superparticularis, superparciens, multiplex superparticularis, multiplex superparciens. Sed tribus primis et simplicibus assumptis, ex his vero compositis duabus reiectis, quidam si iudicio placet sapientium, huiusmodi constituit numerorum conflictum.“ Podobně např. Asilo Wirzeburgensis, *Reg. de rith.* 2, s. 331.

IV.

Souboj čísel se odehrává na hrací desce, která není v nejstarších textech blíže popsána. Teprve tzv. anonym z Lutychu uvádí, že její rozměry jsou 8×12 polí,³⁹ anonym z Řezna pak doporučuje počet polí 8×14 ,⁴⁰ ale postupně se ustálilo

39 Anonymus Leodiensis, *De arith.* 2, s. 340: „Erit enim tabula spaciis duodecim in longitudine et octo in latitudine distributa.“

40 Anonymus Ratisbonensis, *Desc. ritm.* 2, s. 384: „Sit tabula ad longitudinem et

uspořádání 8×16 polí, tzn. 128 hracích políček.⁴¹ Jak bylo zmíněno, rithmomachie je strategickou hrou, kde proti sobě soupeří dvě sestavy čísel – jedna je odvozena ze sudých čísel, druhá z lichých. Každá strana má své žetony umístěny na protilehlé straně hrací desky, a to na čtyřiašedesáti polích. Hrací deska je uprostřed rozdělena čarou zvanou obvykle *diremptoria*, která vymezuje poloviny obou soupeřících stran.⁴²

První ucelený a později užívaný přehled výchozího postavení jednotlivých hracích žetonů je schematicky dochován na nákresu v přílohách k pojednání Odon z Tournai.⁴³ Ovšem již Asilo (podobně jako autoři dalších textů o rithmomachii) uvádí nejen výčet jednotlivých herních figur a jejich číselných hodnot, nýbrž s odkazem na Boethiovu

aritmetickou učebnici počíná své pojednání tím, že všechny číselné řady, které jsou uspořádány podle nějakého poměru (tzn. všechny nestejnosti), pocházejí z původní stejnosti a postupně vznikají v tomto pořadí: z rovnosti povstávají násobky, následně superpartikulární poměry, po nich superparcientní poměry, z nichž se tvoří násobné superpartikulární a superparcientní poměry.⁴⁴ Tento postupný vznik nestejnosti (založený na tříčlenných číselných řadách) je Boethiem názorně popsán a na tato pravidla (*praecepta*)⁴⁵ tvorby různých posloupností se autoři pravidel rithmomachie explicitně odvolávali,⁴⁶ podrobně pak celý matematický postup rozebírá zejména Fortolf.⁴⁷

V zásadě proto platí, že stačí znát, že sestavy čísel, které proti sobě v rithmomachii vystupují, jsou odvozeny ze všech jednociferných čísel (tj. nižších než deset). Jednička pro antiku a středověk nepředstavuje číslo, nýbrž zdroj, matku, prvotní příčinu či kořen čísla, neboť číslo je až produktem (souborem)

latitudinem distincta partis, octo videlicet in latitudine, quatuordecim in longitudine...“ Srov. také Anonymus de Franconia, *Reg. rith.* 2, s. 405.

41 Anonymus de Bavaria, *Reg. rith.*, s. 415: „Sit tabula ad latitudinem octo, ad longitudinem sedecim campis distincta...“ Viz také Odo Tornacensis, *De rith.*, app. B, s. 359–360 nebo Fortolfus, *Rith.* I, 6, s. 432.

42 Fortolfus, *Rith.* I, 6, s. 432–433: „Ipsam vero tabulam per medium in latitudine una linearis intersecet paginula, altrinsecus se octonos aequali dimensione distantes habens campos in longitudine et latitudine. Hanc autem paginulam diremptoriam vocitare placuit, vel quod campos ita dirimat, ut utrique parti aequulae spacium attribuat, vel quod circa eam numerus numerum oppositus oppositum capiendo dirimat.“ Srov. také Anonymus Leodiensis, *De arith.* 5, s. 341; Anonymus Ratisbonensis, *Desc. ritm.*, app. A, s. 396; Anonymus de Franconia, *Reg. rith.*, s. 405 atd.

43 Odo Tornacensis, *De rith.*, app. B, s. 359–360.

44 Asilo Wirzburgensis, *Reg. de rith.* 1, s. 331: „Quinque genera inaequalitatis ex aequalitate procedere manifestum est ex libris arithmeticae, multiplex, superparticulare, superpartiens, multiplex superparticulare, multiplex superpartiens.“ Srov. např. Anonymus Leodiensis, *De arith.* 1, s. 340.

45 Boethius, *Inst. Arith.* I, 32, s. 81: „Praecepta autem tria haec sunt, ut primum numerum primo facias, secundum uero primo et secundo, tertium primo, secundis duobus et tertio.“ Srov. Nikomachos, *Inst. Arith.* I, 23, s. 66–67.

46 Viz např. Hermannus Contractus [?], *Rith.* 11, s. 339; Anonymus Ratisbonensis, *Desc. ritm.* 15, s. 389 atd.

47 Fortolfus, *Rith.* I, 8–9, s. 433–438.

jednotek,⁴⁸ proto zbývá, že sudá sestava je odvozena z čísel 2, 4, 6 a 8, kdežto lichá sestava z čísel 3, 5, 7 a 9 (můžeme nazvat řadou *a*). V souladu s definicí čtvercového čísla (tj. druhá mocnina čísla)⁴⁹ jsou pak další hodnoty stanoveny na základě dvoj-, čtyř-, šesti- a osminásobků (sudá sestava), resp. vycházejí z troj-, pěti-, sedmi- a devítinásobků (sestava lichého týmu), čímž vznikají čísla druhé řady (*b*) hracích figur – viz tab. 2.⁵⁰

Tab. 2 – Násobná čísla v rithmomachii

sudá sestava							
<i>a</i>	2		4		6		8
		2 : 1		4 : 1		6 : 1	
<i>b</i>	4		16		36		64

lichá sestava							
3		5		7		9	<i>a</i>
	3 : 1		5 : 1		7 : 1		9 : 1
9		25		49		81	<i>b</i>

Mezi čísly obou řad (*a* : *b*) jsou násobné poměry (2 : 1, 4 : 1 atd.), proto jejich žetonům náleží tvarová a barevná

odlišnost od dalších hracích kamenů a zároveň jsou na hrací desce umístěny tak, aby mohly reprezentovat daný násobek.⁵¹ Pro figury násobků platí, že se nezřídka užívaly menší žetony, v sudé sestavě obvykle bílé barvy, v liché sestavě v černém provedení.⁵² Zatímco pouze Fortolf zmiňuje jejich čtvercový tvar,⁵³ tak v dodatcích k Odonovu textu jsou násobky vyobrazeny na kulatých žetonech, jak se později stalo pro rithmomachii obvyklé.⁵⁴

Z druhé řady čísel (*b*) pak, v souladu s Boethiovými pravidly pro vznik číselných posloupností podle poměrů, vznikají superpartikulární čísla (tj. řada *c*) a stejným způsobem se v rithmomachii odvodí i čtvrtá řada čísel (*d*), takže čísla řad *c* a *d* vytvářejí ve vztahu k sobě navzájem superpartikulární poměry (*c* : *d*). V sudé sestavě platí, že z dvojnásobku postupně pochází půldruhnásobek (poměr 3 : 2), z čtyřnásobku pětičtvrtinový násobek (5 : 4), ze šesti- násobku sedmišestinový násobek (7 : 6)

48 Viz Boethius, *Inst. Arith.* I, 7, s. 19–20; resp. Nikomachos, *Inst. Arith.* I, 8, s. 14. Upozornění na tuto skutečnost lze nalézt i v nejstarších textech o pravidlech rithmomachie, např. kompliační text *Regulae rithmomachiae* přímo cituje nejrozšířenější (nejen) středověkou definici čísla – viz Anonymus de Franconia, *Reg. rith.* 27, s. 412: „Numerus est unitatum collectio.“

49 Viz Boethius, *Inst. Arith.* II, 10–12, s. 117–119; resp. Nikomachos, *Inst. Arith.* II, 9, s. 90–91; srov. Fortolfus, *Rith.* I, 16, s. 447–448.

50 Velmi názorně viz např. Anonymus de Bavaria, *Reg. rhyth.* app. 7, 10, s. 424–425.

51 Viz např. Asilo Wirzburgensis, *Reg. de rith.* 3, s. 331: „Hinc octo albi minores ex pari denominatas multiplices ostendunt, duplum ut IIII ad II, quadruplum ut XVI ad IIII, sescuplum ut XXXVI ad VI, octuplum ut LXIII ad VIII. His opponantur eiusdem generis octo nigri minores ex impari denominatas habentes proportionem, triplum ut VIII ad III, quincuplum ut XXV ad V, septuplum ut XLVIII ad VII, nonuplum ut LXXXI ad VIII.“

52 Anonymus Leodiensis, *De arith.* 2, s. 340; Odo Tornacensis, *De rith.* 3, s. 345; Anonymus Ratisbonensis, *Desc. ritm.* 3, s. 384–385; resp. app. C, 1, s. 401–402; Anonymus de Franconia, *Reg. rith.* 3, s. 405; Anonymus de Bavaria, *Reg. rhyth.* 2, s. 415.

53 Fortolfus, *Rith.* I, 11, s. 439.

54 Odo Tornacensis, *De rith.*, app. B, s. 361.

a z osminásobku devítiosminový násobek (9 : 8). Lichá soustava čísel pak produkuje z trojnásobku čtyřtřetinový násobek (4 : 3), z pětinasobku šestipětinnový násobek (6 : 5), ze sedminásobku osmisedminový násobek (8 : 7) a z devítinasobku desetidevítinnový násobek (10 : 9) – viz tab. 3.⁵⁵

Tab. 3 – Superpartikulární čísla v rithmomachii

sudá sestava								
<i>b</i>	4		16		36		64	
<i>c</i>	6	3 : 2	20	5 : 4	42	7 : 6	72	9 : 8
<i>d</i>	9		25		49		81	

lichá sestava								
9		25		49		81		<i>b</i>
12	4 : 3	30	6 : 5	56	8 : 7	90	10 : 9	<i>c</i>
16		36		64		100		<i>d</i>

Těmto číslům, která vzešla z násobků a tvoří superpartikulární poměry, byla většinou v sudé sestavě vyčleněna červená barva (někdy s dodatkem, že se jedná o velký žeton), zatímco v liché sestavě bílá barva.⁵⁶ Aby se žetony vyjadřující lichou superpartikularitu od-

lišily od těch, jež zachycovaly násobky na sudé straně, jsou převážně preferovány větší rozměry superpartikulárních hracích kamenů oproti malým kamenům u násobků.⁵⁷ Pouze Fortolf (stejně jako u násobků) píše o čtvercovém tvaru těchto žetonů⁵⁸ a opět nákres z dodatku k Odonovým pravidlům rithmomachie zachycuje trojúhelníkový tvar těchto kamenů,⁵⁹ což se později stalo standardním poznávacím rysem těchto superpartikulárních žetonů.

Také další dvě řady čísel lze odvodit podle Boethiových pravidel pro tvorbu posloupností daných určitým poměrem. Ze superpartikulárních poměrů totiž lze vytvořit superparcientní poměry. Z číselných hodnot čtvrté řady (*d*) se takto dá vyprodukovat pátá řada (*e*), v níž jsou čísla uspořádána do superparcientního vztahu k číslům předchozí řady (*d* : *e*), stejně pak z řady *e* vznikne řada *f*, kde je rovněž zachycen superparcientní vztah mezi čísly (*e* : *f*). V sudém týmu je z poměru 3 : 2 odvozen poměr 5 : 3, z poměru 5 : 4 poměr 9 : 5, z poměru 7 : 6 poměr 13 : 7 a z poměru 9 : 8 poměr 17 : 9. Lichá sestava pak tvoří z poměru 4 : 3 poměr 7 : 4, z poměru 6 : 5 poměr 11 : 6, z poměru 8 : 7 poměr 15 : 8 a z poměru 10 : 9 poměr 19 : 10 – viz tab. 4.⁶⁰

55 Názorně viz zejména Anonymus de Bavaria, *Reg. rhyth.* app. 8, 11, s. 424, 426.

56 Viz např. Asilo Wirzburgensis, *Reg. de rith.* 4, s. 331: „Retro albos octo existant rubri ex genere superparticulari iuncti sint duplis, sesquiquarti quadruplis, sesquiseptimi sescuplis, sesquioctavi octuplis. Item retro negros ex eodem genere otro maiores existant albi, ut sesquitercii iuncti sint triplis, sesquiquinti quincuplis, sesquiseptimi septuplis, sesquinoni nonuplis.“

57 Viz Odo Tornacensis, *De rith.* 4, s. 345; Anonymus Ratisbonensis, *Desc. ritm.* 4, s. 385; resp. app. C, 2, s. 402; Anonymus de Franconia, *Reg. rith.* 3, s. 405; Anonymus de Bavaria, *Reg. rhyth.* 3, s. 415.

58 Fortolfus, *Rith.* I, 11, s. 439.

59 Odo Tornacensis, *De rith.*, app. B, s. 361.

60 Přehledně v podobě tabulky viz Anonymus de Bavaria, *Reg. rhyth.* app. 9, 12, s. 425–426.

Tab. 4 – Superparcientní čísla v rithmomachii

sudá sestava							
<i>d</i>	9		25		49		81
<i>e</i>	15	5 : 3	45	9 : 5	91	13 : 7	153
<i>f</i>	25		81		169		289

lichá sestava							
16		36		64		100	<i>d</i>
28	7 : 4	66	11 : 6	120	15 : 8	190	<i>e</i>
49		121		225		361	<i>f</i>

Takto vzniklá superparcientní čísla, jež mají svůj původ v superpartikulárních poměrech, jsou opětovně na hrací desce odlišena od žetonů, které vyjadřovaly předchozí nestejnosti. Sudé straně je tentokrát v nejstarších textech o rithmomachii vyčleněna černá barva, a aby nedošlo k mýlce s násobnými žetony liché soustavy, je jim tentokrát určena větší velikost hracích figur. Liché superpartikulární poměry mají v některých případech zelenou barvu,⁶¹ ovšem tvarová i barevná specifika superparcientních čísel jsou ve sledovaných textech nejvíce rozrůzněna: např. pro sudou sestavu se vedle velkých černých

žetonů píše i o největších žetonech, pro lichý tým platí, že vedle zelené barvy je někdy doporučována i červená barva, zpravidla pak rovněž doplněna o největší velikost těchto hracích figur.⁶² Pouze Fortolf navrhuje kulatý tvar těchto figur⁶³ a i v tomto případě doplněk k pravidlům Odon z Tournai zachytil později běžný tvar těchto žetonů – tj. čtverec.⁶⁴ Teprve v dalších letech se ustálilo, že (podobě jako v šachách) se všechny hrací figurky (tj. hodnoty násobků, superpartikulárních i superparcientních čísel) soupeřících stran odlišovaly barevně (bílá a černá sestava) a v rámci jednoho týmu se tyto různé poměry odlišovaly tvarově, jak to zaznamenal dodatek k Odonovým pravidlům (tj. kulaté, trojúhelníkové a čtvercové).

Všechny žetony, tj. číselné hodnoty, jsou tedy v rithmomachii odvozeny z jednociferných čísel a celý proces jejich nalezení zachycují tab. 5 a 6.

Uvedeným způsobem získané číselné hodnoty jsou umístěny na hrací desku tak, aby vždy dva žetony, které reprezentují určitý poměr, byly u sebe. Výchozí pozice hracích figur není v nejstarších textech jednoznačně popsána, ale již doplněk k textu Odon z Tournai nabízí ve schematické podobě takové uspořádání hracích kamenů

61 Viz např. Asilo Wirzburgensis, *Reg. de rith.* 4, s. 331: „Retro rubors octo exstant maiores nigri ex genere superpartienti, ut superbipartientes iuncti sint sesquialteris, superquadripartientes sesquiquartis, supersexpartientes sesquiseptis, superoctopartientes sesquioctavis. Item retro albos maiores octo exstant ex eodem genere coloris viridis, ut supertripartientes iuncti sint sesquiterciis, superquinquepartientes sesquiquintis, superseptempartientes sesquiseptimis, supernovempartientes sesquinonis.“

62 Anonymus Leodiensis, *De arith.* 2, s. 340; Odo Tornacensis, *De rith.* 5, s. 345; Anonymus Ratisbonensis, *Desc. ritm.* 5, s. 385–386; resp. app. C, 3, s. 402; Anonymus de Franconia, *Reg. rith.* 5, s. 406; Anonymus de Bavaria, *Reg. rhyth.* 4, s. 415–416.

63 Fortolfus, *Rith.* I, 11, s. 439–440.

64 Odo Tornacensis, *De rith.*, app. B, s. 361.

Tab. 5 – Sudá sestava v rithmomachii

sudá sestava	hodnoty odvozené z:							
	dvojnásobků (2 : 1)		čtyřnásobků (4 : 1)		šestinásobků (6 : 1)		osminásobků (8 : 1)	
	2		4		6		8	
a	2	duplex (2 : 1)	4	quadruplex (4 : 1)	6	sextuplex (6 : 1)	8	octuplex (8 : 1)
	4		16		36		64	
$c = b \cdot ([n + 1] / n)$	6	proportiosesqual- -tera (3 : 2)	20	proportiosesqui- -quarta (5 : 4)	42	proportiosesqui- -sexta (7 : 6)	72	proporti- osesqui- -octava (9 : 8)
	9		25		49		81	
$e = d \cdot ([2n + 1] / n + 1)$	15	proportio superbi- -partiensi (5 : 3)	45	p. super-quadri- -partiensi (9 : 5)	91	proportio supersex- -partiensi (13 : 7)	153	proportio superocto- -partiensi (17 : 9)
	25		81		169		289	
$f = e \cdot ([2n + 1] / n + 1)$								
multi-plices								
super-parti- -culares								
super-parti- -entes								

Tab. 6 – Lichá sestava v rithmomachii

lichá sestava		hodnoty odvozené z:							
		trojnásobků (3 : 1)		pětinásobků (5 : 1)		sedminásobků (7 : 1)		devítinásobků (9 : 1)	
		3		5		7		9	
a		3	triplex (3 : 1)	5	quincu- plex (5 : 1)	7	septemplex (7 : 1)	9	nonuplex (9 : 1)
$b = a \cdot n$		9		25		49		81	
$c = b \cdot ([n + 1] / n)$		12	proportio sesqui- -tertia (4 : 3)	30	proportio sesqui- -quinta (6 : 5)	56	proportio sesqui-septima (8 : 7)	90	proportio sesqui- nona (10 : 9)
$d = c \cdot ([n + 1] / n)$		16		36		64		100	
$e = d \cdot ([2n + 1] / n + 1)$		28	proportio su- pertri-partiens (7 : 4)	66	p. super- -quinque-parti- ens (11 : 6)	120	p. super-septem- -partiens (15 : 8)	190	p. super-novem- -partiens (19 : 10)
$f = e \cdot ([2n + 1] / n + 1)$		49		121		225		361	
									n
									multi-plices
									super-parti- -culares
									super-parti- -entes

Obr. 1 – Výchozí postavení žetonů při rithmomachii

[illegible]

(viz obr. 1), jaké se stalo pro rithmochii obvyklým.⁶⁵

Zatímco v šachách je nejdůležitější figurkou král, v rithmomachii je to tzv. pyramida (na obr. 1 je označena kromě číselné hodnoty ještě písmeny PYR), která je vzletně označena jako královna (*regina*).⁶⁶ Pyramida má nejen specifické postavení v rámci vlastních pravidel hry, ale zároveň není tvořena jedním hracím kamenem jako ostatní figury, nýbrž několika na sebe poskládanými žetony, které samy o sobě vyjadřují druhé mocniny (dobovou terminologií čtvercová čísla) určitých čísel, tj. podobně jako u násobných čísel i tady platí, že se jedná o násobky, kdy násobitel i násobenec mají stejnou číselnou hodnotu. V sudé sestavě čísel má pyramida hodnotu 91 a skládá se ze šesti na

sebe navrstvených žetonů. Nejníže se nachází číslo 36 (6^2 , $6 : 1$, šestinásobek), na něm leží 25 (5^2 , $5 : 1$, pětinásobek), následují 16 (4^2 , $4 : 1$, čtyřnásobek), 9 (3^2 , $3 : 1$, trojnásobek), 4 (2^2 , $2 : 1$, dvojnásobek) a 1 (1^2 , $1 : 1$, totožnost, stejnost, rovnost). Součet hodnot těchto do pyramidu uspořádaných žetonů tvoří 91 ($30 + 25 + 16 + 9 + 4 + 1$). Jelikož od své základny je pyramida vytvořena až do špičky (tj. číselná hodnota 1), nazývá se tato pyramida *perfecta*, tj. úplná, dokonalá. Na liché straně má pyramida hodnotu 190 a tvoří ji pět žetonů, které odkazují k osminásobku (8^2 , 64, tj. $8 : 1$), sedminásobku (7^2 , 49, tj. $7 : 1$), šestinásobku (6^2 , 36, tj. $6 : 1$), pětinásobku (5^2 , 25, tj. $5 : 1$) a čtyřnásobku (4^2 , 16, tj. $4 : 1$). I zde platí, že součet hodnot na žetonech, které tvoří pyramidu, dává výslednou hodnotu celé pyramidu ($190 = 64 + 49 + 36 + 25 + 16$). Na rozdíl od předchozí pyramidu není tato pyramida dovedena až ke svému hrotu, proto se jí dostalo označení *ter*

65 Odo Tornacensis, *De rith.*, app. B, s. 359–360; srov. také Anonymus Ratisbonensis, *Desc. ritm.* app. A, s. 396–397.

66 Anonymus de Bavaria, *Reg. rhyth.* 8, s. 416.

Obr. 2 – Pyramidy sudé (91) a liché (190) sestavy

curta, tj. zkrácená o tři (čtvercová čísla) či velmi zkrácená.⁶⁷ Názorně viz obr. 2 (barevná i tvarová odlišení jednotlivých hracích kamenů, z nichž se pyramidy skládají, nejsou v nejstarších textech o pravidlech této hry uvedena).

V.

Možné tahy jednotlivými žetony byly v průběhu staletí různě modifikovány, ale základní pravidla stanovil již Asilo: žetony se smějí táhnout dopředu, dozadu, doprava i doleva, případně i po diagonále, přičemž kameny reprezentující násobné poměry (později kulaté) mohou být posunuty vždy o jedno pole,

figury zastupující superpartikulární poměry (později trojúhelníkové) o dvě pole a v případě žetonů, které vyjadřují superparcientní poměry, o tři hrací pole.⁶⁸ Na základě základních aritmetických operací pak lze seskupením vlastních žetonů odebírat ty soupeřovy⁶⁹ a využívat je pro dosažení hlavního cíle hry – vítězství.

Výhru v rithmomachii zaručí, když se jedné straně podaří na soupeřově polovině hrací desky sestavit tři (příp.

⁶⁷ Hermannus Contractus [?], *Rith.* 10, s. 338–339: „Piramis XCI constat ex tetragonis XXXVI, XXV, XVI, VIII, IIII, I, et vocatur perfecta. Cuius basis est XXXVI. [...] Piramis CXC constat ex tetragonis LXIII, XLVIII, XXV, XVI, et ter curta vocatur. Cuius basis est LXIII.“ Srov. také Asilo Wirzeburgensis, *Reg. de rith.* 8, s. 332–333; Hermannus Contractus [?], *Rith.* 4, s. 337; Odo Tornacensis, *De rith.* 9, s. 348; app. E, 1–4, s. 372; Anonymus Ratisbonensis, *Desc. ritm.* 8, s. 387; Anonymus de Franconia, *Reg. rith.* 9, s. 406–407; Anonymus de Bavaria, *Reg. rhyth.* 8–9, s. 416–417; app. 1–6, s. 422–424; Fortolfus, *Rith.* I, 16, s. 446–448.

⁶⁸ Asilo Wirzeburgensis, *Reg. de rith.* 6, s. 332: „His ita dispositis, ex alterutra parte alternatim trahuntur omnes species multiplicis in ante, retro, dextrorsum, sinistrorsum, angulariter in campum secundum, superparticularis in tertium, superpartientis in quartum.“ Srov. Hermannus Contractus [?], *Rith.* 2, s. 335; Anonymus Leodiensis, *De arith.* 3, s. 340–341; Odo Tornacensis, *De rith.* 6, s. 346; Anonymus Ratisbonensis, *Desc. ritm.* 6, s. 386; Anonymus de Franconia, *Reg. rith.* 6, s. 406; Anonymus de Bavaria, *Reg. rhyth.* 5, s. 41; Fortolfus, *Rith.* I, 13, s. 442.

⁶⁹ Přehledně v tabulkách viz Anonymus de Bavaria, *Reg. rhyth.* 12–15, s. 419–421; podrobně zejména Fortolfus, *Rith.* I, 14–15, 17, s. 443–446, 448–450; dále srov. např. Hermannus Contractus [?], *Rith.* 3, s. 336; Anonymus Leodiensis, *De arith.* 2, 8–13, s. 340, 342–343; Odo Tornacensis, *De rith.* 7–8, 14–21, s. 347, 350–355 atd.

Tab. 7 – Hlavní posloupnosti podle Boethiova Úvodu do aritmetiky

posloupnost	charakteristika		nalezení středu	příklad	
aritmetická	$a_{n+1} = a_n + d$	diference: $d = a_{n+1} - a_n$	$a_{n+1} = (a_{n+2} + a_n) / 2$	$d = 3$	2, 5, 8
geometrická	$a_{n+1} = a_n \cdot q$	kvocient: $q = a_{n+1} / a_n$	$a_{n+1} = \sqrt{a_{n+2} \cdot a_n}$	$q = 3$	2, 6, 18
harmonická	$a_{n+2} / a_n = (a_{n+2} - a_{n+1}) / (a_{n+1} - a_n)$		$a_{n+1} = [a_n \cdot (a_{n+2} - a_n)] / (a_{n+2} + a_n)$	$h = 3$	2, 3, 6

čtyři) vlastní (či získané) žetony s určitými hodnotami do hlavních číselných posloupností, jak byly vymezeny v *Úvodu do aritmetiky*. Posloupností se zde rozumí taková číselná řada, která je dána určitým poměrem či vzájemným vztahem mezi třemi členy této řady, kdy daný vztah (poměr) určuje velikost numerických hodnot této číselné řady.⁷⁰ Boethius (a Níkomachos) uvádí celkem deset typů posloupností, přičemž tři jsou označeny jako hlavní: aritmetická, geometrická a harmonická.⁷¹ Uvedené tři úměry byly známy již starým pythagorejcům⁷² a v textech o pravidlech rithmomachie je jim velmi často věnovaná velká pozornost, včetně správného nalezení konkrétní hodnoty druhého čísla tříčlenné řady, tedy středu (*terminus medius*) mezi nižším (*terminus minimus*) a vyšším číslem (*terminus maximus*) podle pravidel každé z těchto

posloupností.⁷³ Základní charakteristiku všech tří posloupností nabízí tab. 7.

Zvláště v hudebním umění lze pak tyto tři posloupnosti využít pro formulaci základních vztahů hudebních intervalů (oktáva, kvarta, kvinta, velká sekunda čili velký celý tón), k čemuž může sloužit čtyřčlenná číselná řada, která bude odpovídat tzv. dokonalé harmonii. Tu mohou reprezentovat např. čísla 6, 8, 9, 12, neboť zde je zastoupena aritmetická ($d = 3$, tzn. 6, 9, 12), geometrická (vždy jen pro dva členy, zato však ve dvou poměrech pro dvojici čísel: $q = 4/3$, tzn. 6, 8, resp. 9, 12; $q = 3/2$, tzn. 6, 9, resp. 8, 12) i harmonická ($h = 2$, tzn. 6, 8, 12) posloupnost.⁷⁴

⁷⁰ Boethius, *Inst. Arith.* II, 40, s. 172–174; srov. také Nikomachos, *Inst. Arith.* II, 21, s. 119–122.

⁷¹ Boethius, *Inst. Arith.* II, 41–50, s. 175–213; srov. také Nikomachos, *Inst. Arith.* II, 22–27, s. 122–140.

⁷² Viz např. Archytás z Tarentu – DK 47 B 2 (z Porfyria).

⁷³ Nejpodrobněji viz Fortolfus, *Rith.* II, 2–12, s. 452–463; srov. také např. Odo Tornacensis, *De rith.* app. C, 1–3, s. 363–364; Anonymus Ratisbonensis, *Desc. ritm.* 10–13, s. 387–388; Anonymus de Franconia, *Reg. rith.* 22, s. 410; Anonymus de Bavaria, *Reg. rhyth.* 10–11, s. 417–418.

⁷⁴ Fortolfus, *Rith.* II, 13, s. 463–465: „Restat nunc dicere de maxima et perfecta armonia, quae, quatuor terminis disposita, nobilissimam et principalem victoriae format stationem, tres prescriptas in se continens medietates et omnium musicarum symphoniarum proportionem. Cuius dispositio talis est: VI, VIII, XII, XII. ...

Sestavení žetonů do těchto posloupností je hlavním cílem hry, které vede k vítězství (k tomu je zapotřebí alespoň podle některých raných a většiny pozdějších pravidel odebrat soupeřovu pyramidu⁷⁵). Zatímco Asilo explicitně zmiňuje pouze aritmetickou a harmonickou úměru, v dalších textech jsou postupně představeny všechny posloupnosti, které odpovídají uvedeným charakteristikám, a nechybí ani rozlišení tzv. velké výhry (dokonalé harmonie) a standardních výher (ostatní tři posloupnosti).⁷⁶

Igitur in horum dispositione terminorum arithmetica proportionalitas invenitur, si XII ad VIII vel VIII ad VI comparemus. XII autem ad VIII sesquitercia proportione, VIII ad VI sesquialtera. In utrisque autem ternarius differentia est... Geometrica vero proportio est, si XII ad VIII vel VIII ad VI comparemus. Utraque enim comparatio sesquialtera proportio est,... Armonica quoque medietas hic invenitur, si XII ad VIII et rursus VIII ad VI comparemus... Inveniemus hic quoque omnes musicas consonantias. Denique VIII ad VI et XII ad VIII comparati sesquiterciam proportionem reddunt et diatessaron consonantiam... Item VI ad VIII vel VIII ad XII comparati sesquialteram proportionem faciunt et diapente symphoniam... XII vero ad VI comparati duplam proportionem efficiunt et diapason symphoniam. VIII ad VIII considerati epogdoun faciunt, qui est tonus in musica.“ Srov. např. Odo Tornacensis, *De rith.* app. C, 5, s. 365–366; Anonymus Ratisbonensis, *Desc. ritm.* 14, s. 388–389:

75 Anonymus de Franconia, *Reg. rith.* 10, s. 407: „Qui tendit ad victoriam, sciat adversarii pyramidem sibi esse conquirendam, nam vincere non poterit, nisi illam sustulerit.“

76 Fortolfus, *Rith.* II, 1, s. 451–452: „Sed ad huius speculatione victoriae duos constituimus modos, ad quos perfecte cognoscendos perutile est nosse trium medietatum, hoc est arithmeticae, geometricae, armonicae, proprietates atque differentias. Primus quippe modus est,

V některých textech pravidel jsou pak uvedeny také výčty číselných hodnot, které reprezentují dané posloupnosti. Kupř. v dodatku k pravidlům Odon z Tournai jsou vyčísleny mj. numerické řady aritmetické posloupnosti pro obě sestavy čísel.⁷⁷ Anonym z Lutychu zase vyjmenovává tyto možnosti tříčlenných řad odpovídající harmonické posloupnosti (v mnoha případech musí být použit jeden žeton z druhé sestavy a je zde napsán kurzívou): pro sudou sestavu, když $h = 2$, to je 6, 8, 12 nebo 15, 20, 30; pro $h = 3$ pak 2, 3, 6 nebo 4, 6, 12, pro $h = 5$ je to řada čísel 9, 15, 45. Pro lichou sestavu platí, že harmonickou posloupnost dávají např. čísla 30, 45, 90 ($h = 3$); 3, 5, 15 ($h = 5$); 7, 12, 42 ($h = 6$) či 4, 7, 28 ($h = 7$), pro obě strany pak řady 9, 16, 72 ($h = 8$; lze pouze ze žetonů sudého týmu), 5, 9, 45 a 25, 45, 225 (pro obě $h = 9$).⁷⁸

com tribus tantum terminis, maximo, medio, minimo, positis per singulas medietates, hoc est vel arithmetica vel geometrica sive armonica, victoria perficitur. Alter vero modus est, cum quatuor terminis dispositis per tres insimul medietates, arithmetica geometrica et armonica, maximam et perfectam armoniam symphonizans victoria concelebrat.“ Srov. dále např. Asilo Wirzeburgensis, *Reg. de rith.* 10, s. 333; Hermannus Contractus [?], *Rith.* 5–9, s. 337–338; Odo Tornacensis, *De rith.* 10–11, s. 348–349 ad., včetně odkazů v pozn. 73.

77 Odo Tornacensis, *De rith.* app. F, 3–4, s. 373–374.

78 Anonymus Leodiensis, *De arith.* 7, s. 341: „Hae medietates armonicae ex pari proportionem statuendae sunt: II, III, VI, triplici; VI, VIII, XII, dupli; IIII, VI, XII, tripli; XV, XX, XXX, dupli; VIII, XV, XLV, quincupli. Ex impari proportionem: [...] III, V, XV, quincupli; IIII, VII, XXVIII, septupli; VII, XII, XLII, sescupli; XXX, XLV, XC, tripli. Utrimque:

— VI

Středověký učenec, ať již se vzdělával v katedrální či klášterní škole nebo vědění a znalosti získával na artistické fakultě, příp. jinde, se při výuce aritmetiky nemusel omezovat pouze na učebnicové texty, resp. glosy, komentáře či jejich výklady. Velmi efektivně a hravým způsobem mohl proniknout do tajů aritmetické látky pomocí rithmomachie, deskové strategické hry, jejíž pravidla jsou vystavěna na vybraných (a pro většinu učenců patrně i nejobtížnějších) tématech Boethiova *Úvodu do aritmetiky*.

Jelikož tato stolní desková strategická hra pro dva hráče, která má svůj původ na latinském křesťanském Západě a je aktivně hrána již přibližně jedno tisíciletí, představuje zároveň pedagogicko-didaktický nástroj, padla volba pro základní seznámení se s touto hrou přirozeně na vysvětlení aritmetického traktování vybraných vlastností čísel (relativní vlastnosti čísel, číselné

poměry, jejich původ a převody, tvorba číselných posloupností i přesah do hudby,⁷⁹ včetně tzv. dokonalé harmonie) a jejich použití v této hře. Stačí zmínit číselné hodnoty žetonů, které se ve hře objevují, jejich výchozí postavení, pravidla pro pohyby a získání soupeřových žetonů nebo vlastní cíl hry, který vede k úspěchu a k vítězství. Toto vše koresponduje s aritmetickými poznatky, jak je středověk převzal z antiky a kreativně s nimi pracoval.

Je zřejmé, že rozhodl-li se někdo trávit čas nad rithmomachií, musel to být člověk, který se dokázal orientovat v Boethiově číselné teorii a zároveň si hraním této hry dále osvojoval nejen praktické početní dovednosti, strategické myšlení, ale především fixoval a rozšiřoval povědomí o aritmetice jako takové. Tato hra filosofů (*ludus philosophorum*) tedy v mnoha ohledech naplňuje vizi hravého, prakticky aplikovatelného a využitelného získávání teoretických informací.

VIII, XVI, LXXII, octupli; V, VIII, XLV, nonupli; XXV, XLV, CCXXV, nonupli.“

79 Fortolfovo nejpodrobnější a nejucelenější představení pravidel této hry z doby, kterou sledovala tato studie, tj. cca první století existence písmených dokladů o tom, že se tato hra v Evropě hrála, končí uvedením dvou hudebních kompozic – viz Fortolfus, *Rith.* II, app., s. 465–470.

ZKRATKY

Alanus ab Insulis		
Anticl.	Anticlaudianus	
Anonymus de Bavaria		
Reg. rhyth.	Regulae de rhythmicimachia	1In Inst. Mus. Scholium ad Boethii Musicae Institutionem l. II, c. 10; l. IV, c. 2
Anonymus de Franconia		
Reg. rith.	Regulae rithmomachiae	2In Inst. Mus. Scholium ad Boethii Musicae Institutionem l. II, c. 21
Anonymus Leodiensis		
De arith.	Boetii libri de Arithmetica (de rithmomachia)	Regulae Regulae de numerorum abaci rationibus
Anonymus Ratisbonensis		
Desc. ritm.	Descriptio ritmachyae	Rogatus Rogatus a pluribus (De mensura fistularum)
Asilo Wirzburgensis		
Reg. de rith.	Regula de rithmachia	Hermannus Contractus [?]
Boethius		
Inst. Arith.	De institutione arithmetica	Rith. Ludus qui dicitur rithmicimachia
DK	Die Fragmente der Vorsokratiker	Morus, Thomas
Fortolfus		
Rith.	Rithmicimachia	Utopia De optimo statu reipublicae deque nova insula utopia
Gerbertus Remensis		
In Inst. Arith.	Scholium ad Boethii Arithmetica Institutionem l. II, c. 1	Nikomachos
		Inst. Arith. Introductionis Arithmeticae libri II
		Odo Tornacensis
		De rith. De rithmomachia
		Radulphus de Longo Campo
		In Anticl. In Anticlaudianum Alani Commentum

BIBLIOGRAFIE

- Alan of Lille (2013). *Literary Works* (ed. & transl. W. Wetherbee). Cambridge; London: Harvard University Press.
- Bubnov, N. (ed.) (1899). *Gerberti postea Silvestri II papae Opera Mathematica (972–1003)*. Berlin.
- Borst, A. (1986). *Das Mittelalterliche Zahlenkampfspiel*. Heidelberg: C. Winter.
- Diels, H., Kranz, W. (eds.) (1952). *Die Fragmente der Vorsokratiker*. Berlin: Weidmann.
- Evans, G. R. (1976). „The Rithmomachia: A Mediaeval Mathematical Teaching Aid?“. *Janus* 63, s. 257–273.
- Folkerts, M. (2003). *Essays on Early Medieval Mathematics. The Latin Tradition*. Aldershot: Ashgate/Variorum.
- Folkerts, M. (1996). „Frühe Darstellungen des Gerbertschen Abakus“. In: R. Franci, P. Pagli, L. T. Rogatelli (eds.), *Itinera mathematica. Studi in onore di Gino Arrighi per il suo 90° compleanno*, Siena: Centro studi sulla matematica medioevale, s. 23–43.
- Huglo, M. (2000). „Gerbert, théoricien de la musique, vu de l'an 2000“. *Cahiers de civilisation médiévale* 43(170), s. 143–160.
- Mebben, P. (1999). „Die Arithmomachia des Abraham Ries und weitere neuzeitliche Überlieferungen der Rithmomachie“. *Board Games Studies* 2, s. 60–79.
- More, T. (1978). *Utopie* (přel. B. Ryba). Vyd. 2. Praha: Mladá fronta.
- Morus, T. (nedat.). *De optimo statu reipublicae deque nova insula utopia*, Dostupné z: http://www.intratext.com/IXT/LAT0560/_PA.HTM.
- Moyer, A. E. (2001). *The Philosophers' Game. Rithmomachia in Medieval*

- and Renaissance Europe*. Ann Arbor: University of Michigan Press.
- Nicomachos Gerasensis (1866). *Introductionis Arithmeticae libri II* (ed. R. Hoche). Leipzig: B. G. Teubner.
- Radulphus de Longo Campo (1972). *Anticlaudianum Alani Commentum* (ed. J. Sulowski). Wrocław: Zakład Narodowy im. Ossolińskich.
- Sachs, K.-J. (1970). *Mensura fistularum. Die Mensurierung der Orgelpfeifen im Mittelalter*. Stuttgart: Musikwissenschaftliche Verlagsgesellschaft.
- Sachs, K.-J. (1972). „Gerbertus cognomento musicus. Zur musikgeschichtlichen Stellung des Gerbert von Reims (nachmaligen Papstes Silvester II)“. *Archiv für Musikwissenschaft* 29(4), s. 257–274.
- Silva, J. N. (2010). „Teaching and playing 1000 years ago, Rithmomachia“. In: C. Sigismondi (ed.), *Orbe novus. Astronomia e Studi Gerbertiani*, Roma: UniversItalia, s. 135–148.